MATHÉMATIQUE

Enseignement explicite

Sciences naturelles
FBD – 2e année du 2e cycle

TRAJECTOIRE mathématique

Modélisation algébrique et graphique
en contexte fondamental 1
MAT-4171-2

Tiré à part

ÉDITIONS MARIE FRANCE

Claudie Lefebvre-Leblanc
Martin Francoeur

Enseignement explicite

Sciences naturelles
FBD – 2e année du 2e cycle

TRAJECTOIRE mathématique

Modélisation algébrique et graphique
en contexte fondamental 1
MAT-4171-2

Tiré à part

ÉDITIONS MARIE FRANCE

Claudie Lefebvre-Leblanc
Martin Francoeur

Révision linguistique : Annie St-Germain
Révision scientifique : Alec Laporte
Correction d'épreuves : Doris Lizotte
Conception et réalisation : Interscript
Couverture : LaSo Design

Dépôt légal 2e trimestre 2014
Bibliothèque et Archives Canada
Bibliothèque et Archives nationales du Québec

Éditions Marie-France sont membres de ASSOCIATION NATIONALE DES ÉDITEURS DE LIVRES

ISBN : 978-2-89661-180-5

Imprimé au Canada

Nous reconnaissons l'aide financière du gouvernement du Canada par l'entremise du Fonds du livre du Canada pour nos activités d'édition.

Table des matières

SECTION 1

Manipulations d'expressions algébriques

SECTION 2

Relations et fonctions

 978-2-89661-180-5

SECTION 3

Systèmes d'équations

SECTION 4

Situations-problèmes

978-2-89661-180-5

Réduction d'expressions rationnelles

Simplification d'expressions rationnelles

Une fraction rationnelle est une expression algébrique qui possède un polynôme au dénominateur.

Les restrictions

Lorsque l'on travaille avec des fractions rationnelles, il faut poser des restrictions sur les valeurs de la variable. En effet, comme la division par 0 est impossible, il faut poser une restriction pour la valeur (ou les valeurs) de la variable rendant le dénominateur égal à 0.

Pour trouver ces valeurs, il suffit de factoriser le dénominateur puis de déterminer la valeur (ou les valeurs) rendant chacun des facteurs égal à 0.

Ex. 1 : $\dfrac{a^2+8a-16}{4a^2-11a-3}$ On factorise $4a^2 - 11a - 3 = (a - 3)(4a + 1)$

On cherche la valeur de x tel que

- $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$ ou
- $4a + 1 = 0 \Rightarrow a = {}^{-}0{,}25$

Les restrictions sont donc $a \neq 3$ et $a \neq {}^{-}0{,}25$.

Simplification

Tout comme les fractions, les fractions rationnelles peuvent être réduites en simplifiant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

		Ex. 1	Ex. 2
		$\dfrac{a^2+6a-16}{2a^2-3a-2}$	$\dfrac{9x^2-33x+24}{6x-6}$
1	Factoriser le numérateur et le dénominateur, lorsque possible (voir page 9).	$\dfrac{(a-2)(a+8)}{(2a+1)(a-2)}$	$\dfrac{3(3x-8)(x-1)}{6(x-1)}$
2	Poser les restrictions à partir des facteurs du dénominateur.	• $2a + 1 = 0$ si $a = {}^{-}0{,}5$ • $a - 2 = 0$ si $a = 2$ Donc $a \neq {}^{-}0{,}5$ et 2	$x - 1 = 0$ si $x = 1$ Donc $x \neq 1$
3	Simplifier les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.	$\dfrac{\cancel{(a-2)}(a+8)}{(2a+1)\cancel{(a-2)}}$	$\dfrac{\cancel{3}(3x-8)\cancel{(x-1)}}{\cancel{6(x-1)}}$
4	Réécrire l'expression simplifiée.	$\dfrac{a+8}{2a+1}$	$\dfrac{3x-8}{2}$

12. Simplifiez les expressions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{a^2-25}{a^2+9a+20}$

b) $\dfrac{x^2+12x+27}{x^2+3x-54}$

c) $\dfrac{a^2-36}{a^2+13a+42}$

d) $\dfrac{x^2+11x+18}{x^2+2x-63}$

13. Voici les expressions rationnelles représentant la concentration en sucre de quatre confitures. Considérant que les numérateurs et dénominateurs de chaque expression sont positifs et non nuls, laquelle de ces confitures est la plus sucrée ?

a) $\dfrac{a+6}{a^2+3a-18}$ **b)** $\dfrac{4a+12}{a^2-9}$ **c)** $\dfrac{7a+49}{a^2+4a-21}$ **d)** $\dfrac{5a+5}{a^2-2a-3}$

14. Quelles restrictions doit-on appliquer à l'expression rationnelle suivante : $\dfrac{2x^2-6x-20}{x^2-2x-8}$?

a) $x \neq 2$, $x \neq {}^-4$ **b)** $x \neq {}^-2$, $x \neq 4$ **c)** $x \neq 5$, $x \neq {}^-2$ **d)** $x \neq {}^-5$, $x \neq 2$

978-2-89661-180-5

Passage d'une forme d'écriture à l'autre

Mettre sous forme générale

Pour transformer une règle sous forme générale, il suffit de développer l'expression algébrique représentant la règle.

Ex. 1 : Canonique vers générale

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x-1)^2 + 3 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 2 + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

Ex. 2 : Factorisée vers générale

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(x-2)(x+3) \\ &= 4(x^2 + x - 6) \\ &= 4x^2 + 4x - 24 \end{aligned}$$

Mettre sous forme factorisée

Comme son nom l'indique, pour écrire une règle sous forme factorisée, il suffit de factoriser l'expression représentant la règle.

Ex. 1 : Générale vers factorisée

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 4x - 16 \\ &= 2x^2 + 8x - 4x - 16 \\ &= 2x(x+4) - 4(x+4) \\ &= (2x-4)(x+4) \\ &= 2(x-2)(x+4) \end{aligned}$$

Ex. 2 : Canonique vers factorisée

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= {}^{-}2(x-5)^2 + 8 \\ &= {}^{-}2(x^2 - 10x + 25) + 8 \\ &= {}^{-}2x^2 + 20x - 50 + 8 \\ &= {}^{-}2x^2 + 20x - 42 \end{aligned}\right\}$$

Il faut d'abord développer l'expression pour la mettre sous forme générale avant de la factoriser.

$$\begin{aligned} &= {}^{-}2x^2 + 6x + 14x - 42 \\ &= {}^{-}2x(x-3) + 14(x-3) \\ &= ({}^{-}2x + 14)(x-3) \\ &= {}^{-}2(x-7)(x-3) \end{aligned}$$

Mettre sous forme canonique

Pour transformer une règle sous la forme canonique, on utilise la complétion de carré (voir page 14).

Ex. 1 : Générale vers canonique

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 + 12x - 40 \\ &= 4(x^2 + 3x - 10) \\ &= 4[(x^2 + 3x + 2{,}25) - 2{,}25 - 10] \\ &= 4[(x + 1{,}5)^2 - 12{,}25] \\ &= 4(x + 1{,}5)^2 - 49 \end{aligned}$$

Ex. 2 : Factorisée vers canonique

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= 9(x-2)(x+6) \\ &= 9(x^2 + 4x - 12) \end{aligned}\right\}$$

Il faut développer le produit de binôme avant de faire la complétion de carré.

$$\begin{aligned} &= 9[(x^2 + 4x + 4) - 4 - 12] \\ &= 9[(x+2)^2 - 16] \\ &= 9(x+2)^2 - 144 \end{aligned}$$

8. Complétez le tableau suivant.

Forme canonique	Forme générale	Forme factorisée
$f(x) = 0{,}5(x + 0{,}75)^2 - 0{,}03125$		
	$g(x) = 6x^2 + 54x + 84$	
		$h(x) = {}^{-}2(x + 10)(x - 1)$

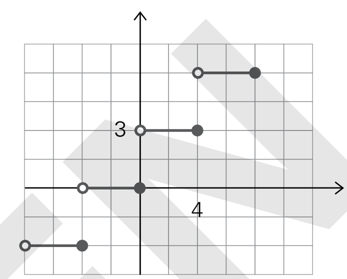
9. Laquelle des règles suivantes n'est pas équivalente à la règle : $f(x) = 4(x - 2)^2 - 4$?

a) $4x^2 - 16x + 12$ **b)** $4(x - 3)(x - 1)$ **c)** $4(x^2 - 4x + 3)$ **d)** $4(x + 3)(x + 1)$

978-2-89661-180-5

Recherche de l'équation

Pour déterminer l'équation d'une fonction partie entière, il faut observer le graphique pour déterminer la valeur des paramètres *a*, *b*, *h* et *k*.

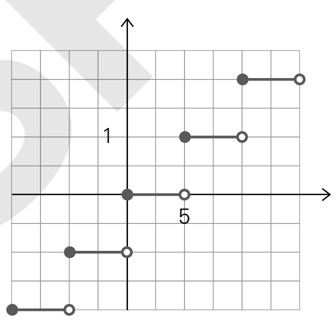


1	Déterminer la valeur des paramètres *a*, *b*, *h* et *k*: • $\lvert a \rvert$: valeur de la contremarche • $\lvert b \rvert$: inverse de la longueur de la marche $\left(\dfrac{1}{\text{longueur marche}}\right)$ • *h*: coordonnée en *x* d'un point fermé • *k*: coordonnée en *y* du même point fermé	• $\lvert a \rvert$: 3 • $\lvert b \rvert$: $1 \div 4 = 0{,}25$ • *h*: 0 • *k*: 0
2	Déterminer le signe du paramètre *b* avec l'orientation des segments: • Si ●—○: $b > 0$ • Si ○—●: $b < 0$	Comme ○—●: $b < 0$ Donc $b = {}^{-}0{,}25$
3	Déterminer le signe du paramètre *a* avec la variation et le signe de *b*: • Si croissante, *a* est de même signe que *b.* • Si décroissante, *a* est de signe contraire à *b.*	Comme la fonction est croissante, *a* est de même signe que *b*. Donc $a = {}^{-}3$
4	Écrire la règle avec tous les paramètres.	$f(x) = {}^{-}3[{}^{-}0{,}25x]$ ou $f(x) = {}^{-}3\left[{}^{-}0{,}25(x-4)\right] + 3$ Autres réponses possibles

Comme les paramètres *h* et *k* peuvent prendre les valeurs de n'importe quel point fermé, il y a toujours plusieurs règles possibles, selon le point fermé choisi.

18. Trouvez la règle des fonctions partie entière représentées dans les graphiques suivants.

a)

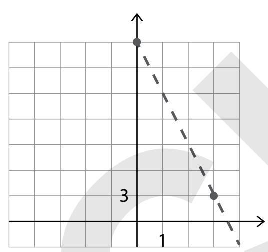
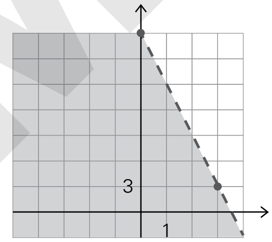


Résolution d'inéquation du premier degré à deux variables (demi-plan)

Résoudre une inéquation du premier degré à deux variables signifie trouver tous les couples (x, y) qui rendent l'inéquation vraie.

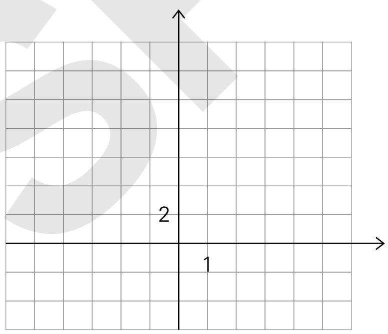
Ex. : $2x + 4y < 10$ Le couple (1, 0) fait partie de l'ensemble-solution, car $2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 < 10$.

Ce type d'inéquations possède une infinité de couples-solutions, il est donc plus facile de les représenter dans un plan cartésien à l'aide du demi-plan.

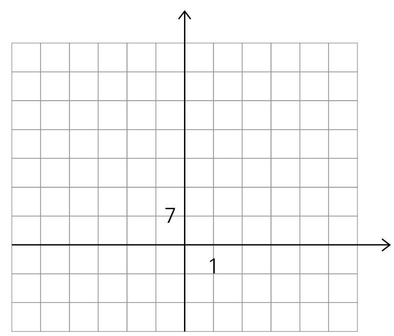
Remplacer l'inégalité par une égalité et transformer l'équation sous forme fonctionnelle.	Tracer la droite frontière trouvée en 1. • Pointillé si $<$ ou $>$ • Plein si $\leq$ ou $\geq$	Vérifier si le couple (0, 0) fait partie de l'ensemble-solution de l'inéquation. • Si oui, colorer le demi-plan auquel appartient le point (0, 0). • Si non, colorer l'autre demi-plan.
$6x + 1y = 21$ $y = {}^{-}6x + 21$	 	$6 \cdot 0 + 1 \cdot 0 < 21 \Rightarrow 0 < 21$: Vrai (0, 0) appartient à l'ensemble-solution 

25. Représentez graphiquement les inéquations suivantes, puis validez votre solution à l'aide d'un point.

a) $15x + 5y \geq 55$



b) $21x + 3y < 84$



978-2-89661-180-5

Résolution par substitution

Tout comme pour les systèmes d'équations du premier degré, la méthode de substitution est utile lorsqu'une variable est isolée dans l'une des deux équations.

Ex.: Résolvez le système d'équations suivant: $y = x - 6$ et $2x^2 - y^2 = {}^{-}56$.

		$y = x - 6$ $2x^2 - y^2 = {}^{-}56$	
1	Au besoin, isoler une variable dans l'équation du 1er degré, puis substituer cette variable dans l'équation du 2e degré.	$2x^2 - (x - 6)^2 = {}^{-}56$	
2	Résoudre l'équation obtenue.	$2x^2 - (x-6)^2 = {}^{-}56$ $2x^2 - x^2 + 12x - 36 = {}^{-}56$ $x^2 + 12x + 20 = 0$ $x^2 + 10x + 2x + 20 = 0$ $x(x+10) + 2(x+10) = 0$ $(x+2)(x+10) = 0$ $\Rightarrow x = {}^{-}2$ et $x = {}^{-}10$	
3	Remplacer la valeur (ou les valeurs) trouvée en 2 dans les équations initiales pour trouver et valider la valeur (ou les valeurs) de l'autre variable.	Si $x = {}^{-}2$ $y = x - 6$ $= {}^{-}2 - 6$ $= {}^{-}8$ $2 \cdot ({}^{-}2)^2 - y^2 = {}^{-}56$ $y^2 = 64$ $y = \pm 8$	Si $x = {}^{-}10$ $y = x - 6$ $= {}^{-}10 - 6$ $= {}^{-}16$ $2 \cdot ({}^{-}10)^2 - y^2 = {}^{-}56$ $y^2 = 256$ $y = \pm 16$
4	Donner le couple-solution.	$({}^{-}2, {}^{-}8)$ et $({}^{-}10, {}^{-}16)$	

10. Résolvez les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode de substitution.

a) $y = {}^{-}3x^2 + x - 4$
$4x - 2y = {}^{-}4$

b) $y = 0{,}25x^2 - x + 5$
$1 = 4x - y$

3. Les pigeons d'argile

Le tir au pigeon d'argile est un sport où un pigeon d'argile est lancé aléatoirement selon une trajectoire parabolique. Un tireur tente ensuite d'atteindre le pigeon à l'aide d'un tir de carabine.

Catherine pratique ce sport depuis peu et elle éprouve des difficultés à atteindre le pigeon d'argile.

Voici des données concernant trois tirs qu'elle a effectués.

	Trajectoire du tir de Catherine (hauteur en m selon le temps en secondes)	**Trajectoire du pigeon** (hauteur en m selon le temps en secondes)
1	$f(x) = 0{,}75x + 1{,}36$	$g(x) = {}^{-}0{,}15x^2 + 1{,}5x + 0{,}4$
2	$h(x) = 0{,}68x + 1{,}36$	$i(x) = {}^{-}0{,}1(x - 6)^2 + 4$
3	$j(x) = 0{,}6x + 1{,}36$	$k(x) = {}^{-}0{,}1(x + 0{,}2)(x - 10)$

À partir de ces données, déterminez le problème de Catherine et donnez-lui un conseil pour améliorer ses résultats.

978-2-89661-180-5