

MATHÉMATIQUE

Enseignement explicite

Sciences naturelles
FBD – 2^e année du 2^e cycle

TRAJECTOIRE

mathématique

Modélisation algébrique et graphique
en contexte fondamental 1
MAT-4171-2

Tiré à part



Claudie Lefebvre-Leblanc
Martin Francoeur

TRAJECTOIRE

mathématique

Modélisation algébrique et graphique
en contexte fondamental 1
MAT-4171-2

Tiré à part



Claudie Lefebvre-Leblanc
Martin Francoeur

Révision linguistique: Annie St-Germain
Révision scientifique: Alec Laporte
Correction d'épreuves: Doris Lizotte
Conception et réalisation: Interscript
Couverture: LaSo Design

© 2014, Éditions Marie-France ltée

Tous droits réservés. Il est interdit de reproduire, d'adapter
ou de traduire l'ensemble ou toute partie de cet ouvrage
sans l'autorisation écrite du propriétaire du copyright.

Dépôt légal 2^e trimestre 2014
Bibliothèque et Archives Canada
Bibliothèque et Archives nationales du Québec

Éditions Marie-France sont membres de

ASSOCIATION
NATIONALE
DES ÉDITEURS
DE LIVRES



ISBN: 978-2-89661-180-5

Imprimé au Canada

Nous reconnaissons l'aide financière du gouvernement du Canada par l'entremise
du Fonds du livre du Canada pour nos activités d'édition.

Table des matières

SECTION 1

Manipulations d'expressions algébriques

■ Opérations sur les expressions algébriques	
Multiplication de polynômes	
• Multiplication de monômes	
• Multiplication d'un monôme par un polynôme	
• Multiplication de deux polynômes	
Division de polynômes	
• Division de monômes	
• Division d'un polynôme par un monôme	
• Division d'un polynôme par un binôme	
■ Factorisation de polynômes	
Factorisation par mise en évidence	
• Simple mise en évidence	
• Double mise en évidence	
• Méthode somme-produit	
Trinôme carré parfait	
Différence de deux carrés	
Factorisation par complétion de carré	
Factorisation de trinômes à l'aide des racines	
■ Réduction d'expressions rationnelles	
Simplification d'expressions rationnelles	
• Les restrictions	
• Simplification	
Multiplication de fractions rationnelles	
Division de fractions rationnelles	
Addition et soustraction de fractions rationnelles	
■ Résolution d'équations du second degré à une variable	
Résolution par factorisation	

Résolution avec les racines
 • Formule.....
 • Nombre de solution(s)

≡ SECTION 2

Relations et fonctions

■ Propriétés des fonctions réelles
 Fonction.....
 Propriétés des fonctions

■ Fonction polynomiale du second degré (parabole).....
 Équation de la fonction quadratique.....
 • Fonction quadratique de base
 • Trois formes d'écriture de l'équation
 • Paramètre a
 • Paramètres h et k
 Coordonnées du sommet et zéros.....
 Représentation graphique.....
 Passage d'une forme d'écriture à l'autre
 • Mettre sous forme générale.....
 • Mettre sous forme factorisée.....
 • Mettre sous forme canonique.....
 Recherche de l'équation
 • À partir des coordonnées d'un point et du sommet.....
 • À partir des coordonnées d'un point et des zéros
 • À partir d'une table de valeurs
 Résolution d'inéquation quadratique.....

■ Fonction partie entière (escalier)
 Équation de la fonction partie entière.....
 • Fonction partie entière de base
 • Paramètres de la fonction partie entière modifiée
 Représentation graphique.....

Recherche de l'équation	
Résolution d'équation partie entière	
■ Fonction polynomiale du premier degré (droite)	
Équation de la droite	
• Équation de base de la droite	
• Paramètres de l'équation modifiée de la droite	
Recherche de l'équation	
Formes d'écriture de l'équation d'une droite	
Passage d'une forme d'écriture à l'autre de l'équation	
• Mettre sous forme fonctionnelle	
• Mettre sous forme générale	
• Mettre sous forme symétrique	
Position relative de deux droites	
Résolution d'inéquation du premier degré à deux variables (demi-plan)	

≡ SECTION 3

Systèmes d'équations

■ Résolution de systèmes d'équations du premier degré à deux variables	
Système d'équations du premier degré à deux variables	
Méthodes de résolution	
• Table de valeurs et graphique	
• Par comparaison	
• Par substitution	
• Par réduction	
Résolution de problèmes comportant un système d'équations	
■ Résolution de systèmes d'équations mixtes	
Système d'équations mixte	
Résolution par comparaison	
Résolution par substitution	

≡ SECTION 4

Situations-problèmes

- Stratégies de résolution de situations-problèmes
 - Explorer la situation-problème.....
 - SP – Les pigeons d’argile.....
 - SP – Compas d’or.....
 - Définir les étapes de la démarche.....
 - SP – Cyberdollars.....
 - Valider sa solution.....
 - SP – Division urbaine.....
- Situations-problèmes.....
 - SP – Carré ou rectangle?.....
 - SP – Des tonnes de rabais.....
 - SP – La vente de jupes.....
 - SP – Le galet sautillant.....
 - SP – Le concours de minifusées.....
 - SP – Le baseball.....

≡ CORRIGÉ.....

Réduction d'expressions rationnelles

Simplification d'expressions rationnelles

Une fraction rationnelle est une expression algébrique qui possède un polynôme au dénominateur.

Les restrictions

Lorsque l'on travaille avec des fractions rationnelles, il faut poser des restrictions sur les valeurs de la variable. En effet, comme la division par 0 est impossible, il faut poser une restriction pour la valeur (ou les valeurs) de la variable rendant le dénominateur égal à 0.

Pour trouver ces valeurs, il suffit de factoriser le dénominateur puis de déterminer la valeur (ou les valeurs) rendant chacun des facteurs égal à 0.

Ex. 1: $\frac{a^2 + 8a - 16}{4a^2 - 11a - 3}$ On factorise $4a^2 - 11a - 3 = (a - 3)(4a + 1)$

On cherche la valeur de x tel que

- $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$ ou
- $4a + 1 = 0 \Rightarrow a = -0,25$

Les restrictions sont donc $a \neq 3$ et $a \neq -0,25$.

Simplification

Tout comme les fractions, les fractions rationnelles peuvent être réduites en simplifiant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

		Ex. 1	Ex. 2
		$\frac{a^2 + 6a - 16}{2a^2 - 3a - 2}$	$\frac{9x^2 - 33x + 24}{6x - 6}$
1	Factoriser le numérateur et le dénominateur, lorsque possible (voir page 9).	$\frac{(a-2)(a+8)}{(2a+1)(a-2)}$	$\frac{3(3x-8)(x-1)}{6(x-1)}$
2	Poser les restrictions à partir des facteurs du dénominateur.	<ul style="list-style-type: none"> • $2a + 1 = 0$ si $a = -0,5$ • $a - 2 = 0$ si $a = 2$ Donc $a \neq -0,5$ et 2	$x - 1 = 0$ si $x = 1$ Donc $x \neq 1$
3	Simplifier les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.	$\frac{\cancel{(a-2)}(a+8)}{(2a+1)\cancel{(a-2)}}$	$\frac{\cancel{3}(3x-8)\cancel{(x-1)}}{6\cancel{(x-1)}}$
4	Réécrire l'expression simplifiée.	$\frac{a+8}{2a+1}$	$\frac{3x-8}{2}$

12. Simplifiez les expressions rationnelles suivantes.

a) $\frac{a^2 - 25}{a^2 + 9a + 20}$

b) $\frac{x^2 + 12x + 27}{x^2 + 3x - 54}$

c) $\frac{a^2 - 36}{a^2 + 13a + 42}$

d) $\frac{x^2 + 11x + 18}{x^2 + 2x - 63}$

13. Voici les expressions rationnelles représentant la concentration en sucre de quatre confitures. Considérant que les numérateurs et dénominateurs de chaque expression sont positifs et non nuls, laquelle de ces confitures est la plus sucrée ?

a) $\frac{a + 6}{a^2 + 3a - 18}$

b) $\frac{4a + 12}{a^2 - 9}$

c) $\frac{7a + 49}{a^2 + 4a - 21}$

d) $\frac{5a + 5}{a^2 - 2a - 3}$

14. Quelles restrictions doit-on appliquer à l'expression rationnelle suivante: $\frac{2x^2 - 6x - 20}{x^2 - 2x - 8}$?

a) $x \neq 2$
 $x \neq -4$

b) $x \neq -2$
 $x \neq 4$

c) $x \neq 5$
 $x \neq -2$

d) $x \neq -5$
 $x \neq 2$

Passage d'une forme d'écriture à l'autre

Mettre sous forme générale

Pour transformer une règle sous forme générale, il suffit de développer l'expression algébrique représentant la règle.

Ex. 1: Canonique vers générale

$$\begin{aligned}f(x) &= 2(x - 1)^2 + 3 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 2 + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 5\end{aligned}$$

Ex. 2: Factorisée vers générale

$$\begin{aligned}f(x) &= 4(x - 2)(x + 3) \\ &= 4(x^2 + x - 6) \\ &= 4x^2 + 4x - 24\end{aligned}$$

Mettre sous forme factorisée

Comme son nom l'indique, pour écrire une règle sous forme factorisée, il suffit de factoriser l'expression représentant la règle.

Ex. 1: Générale vers factorisée

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^2 + 4x - 16 \\ &= 2x^2 + 8x - 4x - 16 \\ &= 2x(x + 4) - 4(x + 4) \\ &= (2x - 4)(x + 4) \\ &= 2(x - 2)(x + 4)\end{aligned}$$

Ex. 2: Canonique vers factorisée

$$\begin{aligned}f(x) &= -2(x - 5)^2 + 8 \\ &= -2(x^2 - 10x + 25) + 8 \\ &= -2x^2 + 20x - 50 + 8 \\ &= -2x^2 + 20x - 42 \\ &= -2x^2 + 6x + 14x - 42 \\ &= -2x(x - 3) + 14(x - 3) \\ &= (-2x + 14)(x - 3) \\ &= -2(x - 7)(x - 3)\end{aligned}$$

Il faut d'abord développer l'expression pour la mettre sous forme générale avant de la factoriser.

Mettre sous forme canonique

Pour transformer une règle sous la forme canonique, on utilise la complétion de carré (voir page 14).

Ex. 1: Générale vers canonique

$$\begin{aligned}f(x) &= 4x^2 + 12x - 40 \\ &= 4(x^2 + 3x - 10) \\ &= 4[(x^2 + 3x + 2,25) - 2,25 - 10] \\ &= 4[(x + 1,5)^2 - 12,25] \\ &= 4(x + 1,5)^2 - 49\end{aligned}$$

Ex. 2: Factorisée vers canonique

$$\begin{aligned}f(x) &= 9(x - 2)(x + 6) \\ &= 9(x^2 + 4x - 12) \\ &= 9[(x^2 + 4x + 4) - 4 - 12] \\ &= 9[(x + 2)^2 - 16] \\ &= 9(x + 2)^2 - 144\end{aligned}$$

Il faut développer le produit de binôme avant de faire la complétion de carré.

8. Complétez le tableau suivant.

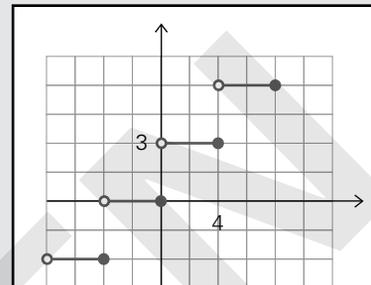
Forme canonique	Forme générale	Forme factorisée
$f(x) = 0,5(x + 0,75)^2 - 0,03125$		
	$g(x) = 6x^2 + 54x + 84$	
		$h(x) = -2(x + 10)(x - 1)$

9. Laquelle des règles suivantes n'est pas équivalente à la règle: $f(x) = 4(x - 2)^2 - 4$?

- a) $4x^2 - 16x + 12$ b) $4(x - 3)(x - 1)$ c) $4(x^2 - 4x + 3)$ d) $4(x + 3)(x + 1)$

Recherche de l'équation

Pour déterminer l'équation d'une fonction partie entière, il faut observer le graphique pour déterminer la valeur des paramètres a , b , h et k .

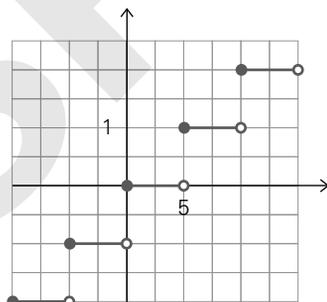


1	Déterminer la valeur des paramètres a , b , h et k : <ul style="list-style-type: none"> • a: valeur de la contremarche • b: inverse de la longueur de la marche $\left(\frac{1}{\text{longueur marche}}\right)$ • h: coordonnée en x d'un point fermé • k: coordonnée en y du même point fermé 	<ul style="list-style-type: none"> • a: 3 • b: $1 \div 4 = 0,25$ • h: 0 • k: 0
2	Déterminer le signe du paramètre b avec l'orientation des segments: <ul style="list-style-type: none"> • Si $\bullet \rightarrow \circ$: $b > 0$ • Si $\circ \rightarrow \bullet$: $b < 0$ 	Comme $\circ \rightarrow \bullet$: $b < 0$ Donc $b = -0,25$
3	Déterminer le signe du paramètre a avec la variation et le signe de b : <ul style="list-style-type: none"> • Si croissante, a est de même signe que b. • Si décroissante, a est de signe contraire à b. 	Comme la fonction est croissante, a est de même signe que b . Donc $a = -3$
4	Écrire la règle avec tous les paramètres.	$f(x) = -3[-0,25x]$ ou $f(x) = -3[-0,25(x - 4)] + 3$ Autres réponses possibles

Comme les paramètres h et k peuvent prendre les valeurs de n'importe quel point fermé, il y a toujours plusieurs règles possibles, selon le point fermé choisi.

18. Trouvez la règle des fonctions partie entière représentées dans les graphiques suivants.

a)

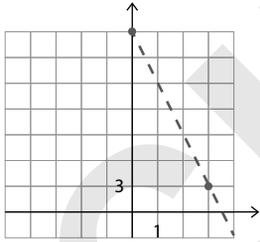
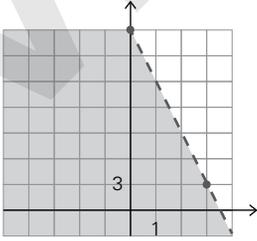


Résolution d'inéquation du premier degré à deux variables (demi-plan)

Résoudre une inéquation du premier degré à deux variables signifie trouver tous les couples (x, y) qui rendent l'inéquation vraie.

Ex.: $2x + 4y < 10$ Le couple $(1, 0)$ fait partie de l'ensemble-solution, car $2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 < 10$.

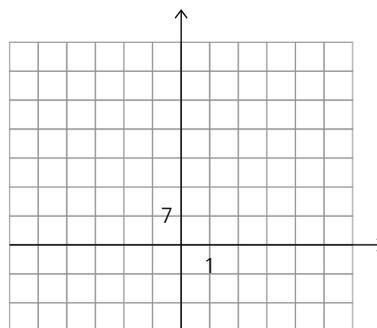
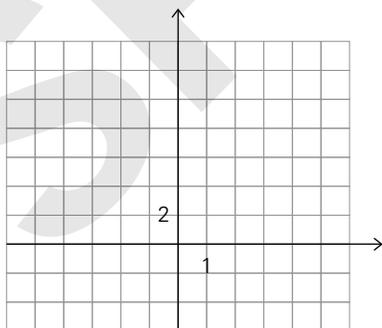
Ce type d'inéquations possède une infinité de couples-solutions, il est donc plus facile de les représenter dans un plan cartésien à l'aide du demi-plan.

Remplacer l'inégalité par une égalité et transformer l'équation sous forme fonctionnelle.	Tracer la droite frontière trouvée en 1. <ul style="list-style-type: none"> • Pointillé si $<$ ou $>$ • Plein si \leq ou \geq 	Vérifier si le couple $(0, 0)$ fait partie de l'ensemble-solution de l'inéquation. <ul style="list-style-type: none"> • Si oui, colorer le demi-plan auquel appartient le point $(0, 0)$. • Si non, colorer l'autre demi-plan.
$6x + 1y = 21$ $y = -6x + 21$		$6 \cdot 0 + 1 \cdot 0 < 21 \Rightarrow 0 < 21 : \text{Vrai}$ $(0, 0) \text{ appartient à l'ensemble-solution}$ 

25. Représentez graphiquement les inéquations suivantes, puis validez votre solution à l'aide d'un point.

a) $15x + 5y \geq 55$

b) $21x + 3y < 84$



Résolution par substitution

Tout comme pour les systèmes d'équations du premier degré, la méthode de substitution est utile lorsqu'une variable est isolée dans l'une des deux équations.

Ex. : Résolvez le système d'équations suivant: $y = x - 6$ et $2x^2 - y^2 = -56$.

		$y = x - 6$ $2x^2 - y^2 = -56$	
1	Au besoin, isoler une variable dans l'équation du 1 ^{er} degré, puis substituer cette variable dans l'équation du 2 ^e degré.	$2x^2 - (x - 6)^2 = -56$	
2	Résoudre l'équation obtenue.	$2x^2 - (x - 6)^2 = -56$ $2x^2 - x^2 + 12x - 36 = -56$ $x^2 + 12x + 20 = 0$ $x^2 + 10x + 2x + 20 = 0$ $x(x + 10) + 2(x + 10) = 0$ $(x + 2)(x + 10) = 0$ $\Rightarrow x = -2 \text{ et } x = -10$	
3	Remplacer la valeur (ou les valeurs) trouvée en 2 dans les équations initiales pour trouver et valider la valeur (ou les valeurs) de l'autre variable.	Si $x = -2$ $y = x - 6$ $= -2 - 6$ $= -8$ $2 \cdot (-2)^2 - y^2 = -56$ $y^2 = 64$ $y = \pm 8$	Si $x = -10$ $y = x - 6$ $= -10 - 6$ $= -16$ $2 \cdot (-10)^2 - y^2 = -56$ $y^2 = 256$ $y = \pm 16$
4	Donner le couple-solution.	$(-2, -8)$ et $(-10, -16)$	

10. Résolvez les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode de substitution.

a) $y = -3x^2 + x - 4$
 $4x - 2y = -4$

b) $y = 0,25x^2 - x + 5$
 $1 = 4x - y$

3. Les pigeons d'argile

Le tir au pigeon d'argile est un sport où un pigeon d'argile est lancé aléatoirement selon une trajectoire parabolique. Un tireur tente ensuite d'atteindre le pigeon à l'aide d'un tir de carabine.

Catherine pratique ce sport depuis peu et elle éprouve des difficultés à atteindre le pigeon d'argile.

Voici des données concernant trois tirs qu'elle a effectués.

	Trajectoire du tir de Catherine (hauteur en m selon le temps en secondes)	Trajectoire du pigeon (hauteur en m selon le temps en secondes)
1	$f(x) = 0,75x + 1,36$	$g(x) = -0,15x^2 + 1,5x + 0,4$
2	$h(x) = 0,68x + 1,36$	$i(x) = -0,1(x - 6)^2 + 4$
3	$j(x) = 0,6x + 1,36$	$k(x) = -0,1(x + 0,2)(x - 10)$

À partir de ces données, déterminez le problème de Catherine et donnez-lui un conseil pour améliorer ses résultats.